Petre Năchilă

Cătălin Eugen Năchilă

Matematică pentru toți

Clasa a X-a

Științele naturii, filiera tehnologică – toate specializările

Editura NOMINA

Cuprins

Capitolul 1
MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale. Modul, aproximări, parte întreagă, parte fracționară

a. Mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Definiția 1. Fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește număr rațional. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 1. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ au proprietățile:

1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;

2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;

3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$) : $a + (-a) = 0$;

6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$) : $a \cdot a^{-1} = 1$;

7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observații: a) În $\mathbb{N}$ doar 0 are opus (pe 0). b) În $\mathbb{N}$ un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1. c) În $\mathbb{Z}$, elementele inversabile sunt 1 și -1. Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiția 2. Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

8) Trichotomie. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;

9) Axioma lui Arhimede. Pentru orice două numere naturale a, b, $a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left[\frac{b}{a}\right] + 1$)

- Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale;
- fracție zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ cifre)

$$a_0,(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}};$$

• fracție zecimală periodică mixtă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ cifre)

$$a_0,a_1,a_2...a_n(b_1b_2...b_m) = a_0 + \frac{\overline{a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m} - \overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{m}\underbrace{00...0}_{n}}.$$

Teorema 2. Orice număr rațional se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

b. Mulțimea $\mathbb{R}$. Ordonarea numerelor reale

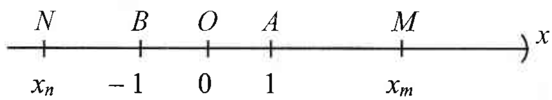
Rezolvarea ecuațiilor de forma $x^2 = p$, p număr prim, $x \in \mathbb{Q}$, imposibilitatea comparării unor lungimi din geometrie (diagonala cu latura pătratului, lungimea cercului cu diametrul său) au condus la considerarea mulțimii numerelor iraționale.

Avem $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ (observație: $\mathbb{I}$ nu este notație consacrată).

Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{p}$, p număr prim; π.

Axa numerelor reale este o dreaptă pe care s-au fixat: originea O, un sens pozitiv (de la stânga la dreapta) și o unitate de măsură ($[OA]$ – segment unitate, A la dreapta originii.



Fiecărui număr real $x_m > 0$ îi corespunde un punct unic $M \in (OA$ astfel încât $OM = x_M$ și reciproc.

Fiecărui număr real $x_n < 0$ îi corespunde un punct unic $N \in (OB$ astfel încât $ON = |x_N| = -x_N$ și reciproc.

Definiția 3. Avem $x_M \geq x_N$ dacă $M = N$ sau M este la dreapta lui N.

Definiția 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Avem $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $b = a + c$. Avem $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $b = a + c$.

Observație. Orice număr irațional se reprezintă ca un număr zecimal cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic. Exemplu: 2,13133133313333......

Teorema 3. Între două numere reale există cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

Teorema 4. Relația „≤" (respectiv „≥") este o relație de ordine pe $\mathbb{R}$, adică are următoarele proprietăți:

a) reflexivitate: $a \leq a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) antisimetrie: $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$;

c) tranzitivitate: $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a = c$.

Teorema 5. Relația „<" (respectiv „>") are doar proprietatea de tranzitivitate.

O relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă se numește relație de ordine.

O relație reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește relație de echivalență.

Teorema 6. Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{R}$ are aceleași proprietăți ca adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{Q}$ (Teorema 1, paragraful 1.2).

Definiţia 5. Definim *scăderea* şi *împărţirea* astfel:

a) $a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbb{R}$; b) $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*$.

Legătura dintre relaţia de ordine şi operaţiile de adunare şi înmulţire pe $\mathbb{R}$ se face prin următoarele proprietăţi:

a) $a \le b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \le b + c$; b) $a \le b, c \le d \Rightarrow a + c \le b + d$;
c) $a \le b, c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$, d) $a \le b, c < 0 \Rightarrow ac \ge bc$;
e) $0 < a \le b, 0 < c \le d \Rightarrow ac \le bd$ şi $\frac{a}{d} \le \frac{b}{c}$.

c. Modulul unui număr real

Definiţia 6: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$.

Proprietăţile modulului numerelor reale

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, avem:

1) $|x| \ge 0$, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $|-x| = |x|$, $|x^2| = x^2 = |x|^2$;
3) $|x| = \max(-x, x)$;
4) $|x + y| \le |x| + |y|$;
5) $|x - y| \le |x| + |y|$;
6) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \ne 0$;
8) $||x| - |y|| \le |x - y|$;
9) $||x| - |y|| \le |x + y|$;
10) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
11) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
12) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$;
13) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ sau $x \ge a$.

d. Aproximări prin lipsă sau prin adaos

Se numeşte număr real un număr x reprezentat prin scrierea $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, iar a_i sunt cifre, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 7: Numărul a aproximează prin lipsă numărul x cu o eroare mai mică decât k ($k > 0$) dacă $a \le x \le a + k$ (adică $0 \le x - a \le k$).

Definiţia 8: Numărul a aproximează prin adaos numărul x cu o eroare mai mică decât k ($k > 0$) dacă $a - k \le x \le a + k$ (adică $|x - a| \le k$). În practică de obicei se lucrează cu aproximări de forma 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$.

- Aproximările zecimale ale numărului $x > 0$ cu eroarea mai mică decât 10^{-n} sunt:

- prin lipsă: $x'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$
- prin adaos: $x''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$.

Observaţii: a) $x'_n, x''_n \in \mathbb{Q}$; b) $x'_n \le x < x''_n$;
c) $x''_n = x'_n + 10^{-n}$; d) $|x - x'_n| \le 10^{-n}$; $|x'_n - x| < 10^{-n}$.

- Aproximările zecimale ale numărului $x < 0$ cu eroarea mai mică decât 10^{-n} sunt:

- prin lipsă: $x'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n - \frac{1}{10^n}$; - prin adaos: $x''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$.

Observații: a) $x'_n, x''_n \in \mathbb{Q}$; b) $x'_n < x \le x''_n$;

c) $x'_n = x''_n - \dfrac{1}{10^n}$; d) $|x - x'_n| < 10^{-n}$; $|x - x''_n| \le 10^{-n}$.

Definiția 9: Aproximările zecimale prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-n} ale numărului real x se numesc trunchieri de ordinul n ale lui x.

Definiția 10: Se numește *rotunjire* a numărului x la a n-a zecimală, cel mai apropiat număr față de x dintre numerele x'_n și x''_n.

Observație: Dacă $x = a_0,a_1a_2a_3\ldots > 0$, atunci rotunjirea la a n-a zecimală a lui x este:

a) $a_0,a_1a_2\ldots,a_n$ dacă $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

b) $a_0,a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$ dacă $a_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definiția 11: Fiind date numărul real x și o valoare aproximativă a lui x, atunci $\Delta x = a - x$ se numește eroare absolută. Dacă $\Delta x < 0$, a este aproximare prin lipsă, iar dacă $\Delta x > 0$, a este aproximare prin adaos.

Definiția 12: Spunem că b este o aproximare „mai bună” decât a pentru numărul x dacă $|x - b| \le |x - a|$.

e. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiția 1. Se numește *partea întreagă* a unui număr real x cel mai mare număr întreg cel mult egal cu x. Avem $[x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $n \le x < n + 1$.

Definiția 2. Se numește *parte fracționară* a numărului real x numărul $\{x\} = x - [-x]$.

Proprietăți:

1) $[x] \le x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $x - 1 < [x] \le x, \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $x < 0 \Rightarrow [x] < 0$;

4) $x \ge 0 \Rightarrow [x] \ge 0$;

5) $[[x]] = [x], \forall x \in \mathbb{R}$;

6) $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$;

7) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

8) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in [0, 1)$;

9) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

10) $[n + x] = n + [x], \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$

11) $\{n + x\} = \{x\}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$;

12) Identitatea lui Hermite. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ avem:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Probleme rezolvate

1. Determinați numărul de triplete (a, b, c) de numere naturale nenule distincte pentru care $a,(b) + b,(c) + c,(a) = 8,(8)$.

Soluție. $a + b + c + \dfrac{a+b+c}{9} = 8\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow a + b + c = 8$. Presupunem $1 \le a < b < c$. Avem soluțiile $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$. Prin permutări se obțin $6 + 6 = 12$ soluții.

2. Fie a, b, c cu $abc = 1$. Determinați numărul $A = \dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ca+c+1}$.

Soluție. Deoarece $abc = 1$, avem $\dfrac{b}{bc+b+1} = \dfrac{ab}{abc+ab+a} = \dfrac{ab}{ab+a+1}$, $\dfrac{c}{ca+c+1} = \dfrac{abc}{(abc)\cdot a+abc+ab} = \dfrac{1}{ab+a+1}$ și atunci $A = \dfrac{a+ab+1}{ab+a+1} = 1$.

3. Rezolvați inecuațiile:

a) $\dfrac{|x^2-1|}{2-|2-x|} \le 0$; b) $|2x-1|+|2x+1| \le 2$.

Soluție. a) Numitorul este $f(x) = \begin{cases} 2+x-2 = x, & x \le 2 \\ 2-x+2 = 4-x, & x > 2 \end{cases}$. Avem $|x^2-1| \ge 0$ cu „=” pentru $x = \pm 1$. Atunci este necesar ca $f(x) < 0$. Avem $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ și deci $S = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$; b) $f(x) = \begin{cases} -2x+1-2x-1 = -4x, & x < -\dfrac{1}{2} \\ -2x+1+2x+1 = 2, & x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \\ 2x-1+2x+1 = 4x, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Pentru $x < -\dfrac{1}{2}$ avem $f(x) = -4x > 2$. Pentru $x > \dfrac{1}{2}$ avem $f(x) > 2$. Rămâne $S = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

4. Demonstrați că $\max(a, b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluție. i) $a \ge b \Rightarrow \dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b+a-b}{2} = a = \max(a, b)$;

ii) $a < b \Rightarrow \dfrac{a+b+|a-b|}{2} = \dfrac{a+b-a+b}{2} = b = \max(a, b)$.

5. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $[x] + \left[x+\dfrac{1}{2}\right] = [2x]$.

Soluție. Fie $[x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$; i) Dacă $x \in \left[n, n+\dfrac{1}{2}\right)$, atunci $x+\dfrac{1}{2} \in \left[n+\dfrac{1}{2}, n+1\right)$, $2x \in [2n, 2n+1)$ și deci $[x] + \left[x+\dfrac{1}{2}\right] = n + n = 2n = [2x]$.

ii) Dacă $x \in \left(n+\dfrac{1}{2}, n+1\right)$, atunci $x+\dfrac{1}{2} \in \left(n+1, n+1+\dfrac{1}{2}\right)$, $2x \in (2n+1, 2n+2)$ și $[x] + \left[x+\dfrac{1}{2}\right] = n + n + 1 = 2n + 1 = [2x]$. Deoarece $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$, identitatea este adevărată pentru orice $x \in [n, n+1)$ este adevărată pe $\mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Efectuați:

a) $\left[0,2+\frac{18}{31}\left(\frac{1}{45}+\frac{7}{30}-\frac{1}{12}\right)\right]:(0,1)^2$;

b) $[1+0,(16)]\cdot\left[\left(\frac{1}{150}-\frac{0,1}{20}\right):\frac{1}{300}+\frac{14}{25}\left(\frac{1}{42}+\frac{5}{36}+\frac{1}{63}\right)\right]$;

c) $\frac{1}{0,(21)}+\frac{1}{0,(42)}+\frac{1}{0,(84)}:\left(\frac{1}{0,2(1)}+\frac{1}{0,4(2)}+\frac{1}{0,8(4)}\right)$.

2. Dați câte două exemple de perechi (x, y) cu proprietățile:

a) $x, y \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, xy \in \mathbb{N}$;
b) $x, y \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, \frac{x}{y} \in \mathbb{N}$;
c) $x, y \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, x+y \in \mathbb{Z}$;
d) $x, y \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, xy \in \mathbb{Z}$.

3. Demonstrați că $\overline{0,(abc)}+\overline{0,(bca)}+\overline{0,(cab)}=\overline{0,a(bc)}+\overline{0,b(ca)}+\overline{0,c(ab)}$.

4. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:
a) $a, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
b) $a, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow a-b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
c) $a, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
d) $a, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
e) $(a+b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$;
f) $ab \in \mathbb{Q} \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$.

5. Determinați aproximările prin lipsă, respectiv prin adaos cu n zecimale, unde $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ pentru numerele:
a) 2,4375; b) –3,2689; c) 4,(36); d) –4,(265);
e) 5,15(7); f) –5,63(26); g) –4,00006.

6. Ordonați crescător numerele:
a) 1,(23); 1,23; 1,2(3); 1,23(4); 1,2(34);
b) –3,1(7); –3,17; –3,175; –3,17(4); –3,17(5).

7. Aproximați prin lipsă, respectiv prin adaos cu două zecimale numerele:

a) $a=\frac{4}{15}$; b) $b=\frac{2}{19}$; c) $c=-\frac{1}{13}$.

8. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:
a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$;
b) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$;
c) $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$;
d) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$;
e) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;
f) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $ab^2c^3 = 1$. Determinați numerele:

$$A = |a+b-c|, B = |ab-bc-ca+1|.$$

10. Demonstrați că dacă $x, y \in [4, 6]$, atunci $xy - 5(x + y) + 30 \in [4, 6]$.

11. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $\min(a, b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

12. Fie $a, b \in \{\pm1, 0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $|ax + by| \leq |x| + |y|$.

13. Rezolvați ecuațiile:

a) $|(x-3)^2 - (x+3)^2| = 12$;

b) $|(x+1)^3 - (x-1)^3| = 8$;

c) $|x-3| + |x+3| = 6$;

d) $\left|\dfrac{1}{1-x}\right| = \left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|$.

14. Rezolvați inecuațiile:

a) $\left|\dfrac{3x+1}{x} - 3\right| \geq \dfrac{1}{2}$;

b) $\left|\dfrac{x-3}{1-2x} + \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{6}$

c) $2x^2 - 3|x| + 1 \leq 0$;

d) $(x-6)(3-|x-2|) > 0$;

e) $|3x-2| + |3x+2| \leq 4$.

15. Demonstrați că:

a) $x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0$;

b) $x < 0 \Leftrightarrow [x] < 0$;

c) $[[x]] = [x]$.

16. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

a) $[x] \leq x < [x] + 1$;

b) $x + 1 < [x] \leq x$.

17. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $[x] = [y]$. Demonstrați că $|x - y| < 1$.

18. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x\} = \{y\}$. Demonstrați că $x - y \in \mathbb{Z}$.

19. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc relațiile:

a) $E(x) = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$;

b) $-[x] + [x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$.

20. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) 2,14;

b) –5,38;

c) $\sqrt{3} - 1$;

d) $\sqrt{2} - 3$.

21. Demonstrați că:

a) $\left[\dfrac{1}{a}\right] = [a] \Leftrightarrow a = \pm 1$;

b) $[n] + [-n] = 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

22. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left[\dfrac{x+4}{3}\right] = \dfrac{x+3}{4}$;

b) $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right] = 4$;

c) $\left[\dfrac{3x+2}{4}\right] = \left[\dfrac{-x+3}{2}\right]$;

d) $\left[\dfrac{x-3}{3}\right] = \dfrac{x+1}{4}$;

e) $\left[\dfrac{3x-1}{2}\right] = \dfrac{3x+1}{2}$;

f) $\left[\dfrac{2x^2+1}{x^2}\right] = x$.

1.2. Puteri cu exponent număr întreg

Definiția 1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Se numeşte *puterea n* a lui a (notată a^n) produsul lui a cu el însuşi având n factori.

Avem: 1) $0^n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; 2) $1^n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; 3) $a^0 = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^*$; 4) $a^1 = a$; 5) 0^0 nu are sens.

Proprietăți ale puterilor naturale ale numerelor reale:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (înmulțirea puterilor cu aceeaşi bază), $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ (împărțirea puterilor cu aceeaşi bază), $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$;

3) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (puterea produsului), $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (puterea câtului), $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) $(a^m)^n = a^{mn}$ (puterea altei puteri), $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Definiția 2. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte *puterea (–n)* a numărului a numărul $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Proprietățile puterilor cu exponent întreg negativ ale unui număr real nenul sunt aceleaşi cu cele de la puterile cu exponent natural, cu excepția faptului că proprietatea 2 este adevărată pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Dacă $a > 0$, atunci $a^n > 0$.

ii) Dacă $a < 0$ şi n este număr par, atunci $a^n > 0$.

iii) Dacă $a < 0$ şi n este număr impar, atunci $a^n < 0$.

Observație. Se ține seamă că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ avem $(-a)^2 = a^2 = a \cdot a > 0$.

Teorema 2. Fie $a > 0$ şi fie $m, n \in \mathbb{Z}$.

i) Dacă $a > 1$, atunci $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.

ii) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

iii) Dacă $a \neq 1$, atunci $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$.

Demonstrație. i) Presupunem $m > n$. Atunci $m - n \geq 1$ şi avem $a^m = a^{m-n} \cdot a^n$. Presupunem $a^m > a^n$. Dacă $m < n$, atunci $a^m < a^n$ (contradicție). Dacă $m = n$, atunci $a^m = a^n$. Deci $m > n$. ii) Fie $b = \dfrac{1}{a} > 1$. Folosim i). Avem $a^m > a^n \Leftrightarrow \dfrac{1}{b^m} > \dfrac{1}{b^n} \Leftrightarrow b^n > b^m \Leftrightarrow m < n$.

iii) $a^m = a^n \Leftrightarrow \dfrac{a^n}{a^m} = 1 \Leftrightarrow a^{n-m} = 1$. Cum $a \neq 1$, avem $n - m = 0 \Leftrightarrow m = n$.

Identități remarcabile:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$;

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

4) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

5) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

6) $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

Probleme propuse

1. Calculați puterile cu exponent 2, 3, 4 pentru numerele:

a) 2; b) -3; c) $\frac{2}{3}$; d) $-\frac{3}{4}$; e) $0{,}2$; f) $-0{,}01$.

2. Determinați semnele următoarelor puteri:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; c) $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right)^5$; d) $(-2{,}5)^{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Scrieți ca puteri ale lui 2 numerele: 16, 32, 128, 512, 2048, 8192;
b) Scrieți ca puteri ale lui 3 numerele: 27, 243, 2187, 19683, 177147;
c) Scrieți ca puteri ale lui 5 numerele: 125, 3125, 78125, 290625.

4. Efectuați:

a) $\frac{2^8}{81^2} \cdot \frac{3^9}{16^2}$; b) $125^6 \cdot \frac{1}{25^4}$; c) $\frac{2^{3^4}}{(8^2)^3}$.

5. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că:
a) $2^{3n} \cdot 4^{2n} \cdot 8^{4n} = 4^{19}$; b) $4 \cdot 256 < 2^n \le 16^3$.

6. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că $\frac{16}{81} > \left(\frac{2}{3}\right)^n \ge \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$.

7. Demonstrați că:
a) $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$;
b) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
c) $a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

8. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că:
a) $\left(9+\sqrt{5}\right)^3 + \left(9-\sqrt{5}\right)^3 = n^3$; b) $\left(1+\sqrt{85}\right)^3 + \left(1-\sqrt{85}\right)^3 = 8^n$.

9. Demonstrați că pentru orice numere reale a, b, c avem:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

10. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:
a) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$; b) $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

11. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Demonstrați că $a^3 < b^3$.

12. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Comparați a^2 cu b^2.

13. Precizați care număr este mai mare:
a) 4^8 sau 2^{15}; b) 27^6 sau 9^9; c) 125^4 sau 25^6; d) 4^{300} sau 3^{400}.

14. Calculați:

a) $\left[(-4)^5\right]^9+(2^2)^{45}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{22}+(-9)^{-11}$; b) $\left[\left(101^2+101^{-2}\right)\left(101^2-101^{-2}\right)\right]^0$;

c) $\left[\left(5-\frac{24}{5}\right)^n\left(-5+\frac{24}{5}\right)^{-n}\right]^{-2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

15. Determinați $m, n, p \in \mathbb{Z}$, dacă $\frac{2^m\cdot 3^n}{5^p}=\frac{1}{375000}$.

16. Calculați:

a) $(3^{-2}):(-3^3)+2^{-5}+((-2)^5)^{-1}+(-0{,}5)^0$; b) $\frac{2^{-3}\cdot 5^4\cdot 10^{-5}}{2^{-4}\cdot 5^3\cdot 10^{-6}}$; c) $\frac{5\cdot 4^{12}-3\cdot 8^8}{16^3}$.

17. Descompuneți în factori expresiile:

a) $a^5+a^3-a^2-1$; b) a^4-2a^3-2a-1; c) $a^4+a^2b^2+b^4$;
d) a^8+a^4+1; e) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$; f) $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$.

18. Scrieți expresiile următoare sub forma x^n, $n\in\mathbb{Z}$:

a) $x\cdot\frac{1}{x^4}\cdot(x^5)^2$; b) $\frac{x^4\cdot x^{-6}}{x^{-8}\cdot x^3}\cdot(x^{-2})^{-1}$; c) $\frac{\left[(x^{-2})^{-3}\right]^4}{\left\{\left[(-x)^3\right]^4\right\}^2}$.

19. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{2a}{1+a^2}-\frac{4a^3}{1+a^4}-\frac{8a^7}{1+a^8}$;

b) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a+1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

c) $\left(a+\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a-b}-b\right)-\left(\frac{a}{a+b}+b\right)\left(\frac{b}{a-b}-a\right)$.

20. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$ cu $a+b+c=0$. Demonstrați că:

a) $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$;

b) $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

21. Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem:

a) $8+88+888+\ldots+\underbrace{88\ldots88}_{n\text{ ori}}=\frac{8(10^{n+1}-9n-10)}{81}$;

b) $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=n+\frac{(n-1)(2^n-1)}{2^n}$, $a\in\mathbb{R}$.

1.3. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3

Teorema 1. Pentru orice număr real $a \geq 0$ există un număr real unic $x \geq 0$ astfel încât $x^2 = a$ (numărul real x notat cu $\sqrt{a}$ se numește rădăcina pătrată a numărului a).

Teorema 2. Pentru orice număr real a există un număr real unic x astfel încât $x^3 = a$ (Numărul real x notat cu $\sqrt[3]{a}$ se numește rădăcina cubică a numărului a, sau radicalul de ordinul 3 din a).

• **Proprietățile radicalului de ordinul 2:** Fie $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $\sqrt{a^2} = a\left(\text{pentru } a \in \mathbb{R} \text{ avem } \sqrt{a^2} = |a|\right)$; b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; d) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$; e) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; f) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Observație. Dacă $a < 0$, $b < 0$ avem: $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

• **Proprietățile radicalului de ordinul 3:** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 0$; b) $a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > 0$; c) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;

d) $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; f) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$;

g) $\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n$; h) $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

• **Formula radicalilor dubli** (compuși, suprapuși)

Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b$. Avem: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

• Pentru raționalizarea numitorilor se folosesc formulele:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, $a > 0$; 2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$, $a, b > 0$;

3) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$; 4) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$;

5) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a + b$.

Alte proprietăți (de „monotonie”): i) Fie $a > 0$, $b \geq 0$. Atunci $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

ii) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Probleme rezolvate

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}} = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}}$.

Soluție. Se impun condițiile $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geq 0$ și $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) = D$.

Ridicând relația la pătrat avem $\dfrac{x^2-4}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-4} \Leftrightarrow (x^2-4)^2=(x^2+1)^2 \Leftrightarrow 10x^2=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin D \Rightarrow S=\varnothing$.

2. Arătați că $a=\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} \in \mathbb{N}$.
Soluție. Folosind formula radicalilor dubli obținem:

$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{\dfrac{13+\sqrt{169-48}}{2}}+\sqrt{\dfrac{13-\sqrt{169-48}}{2}}=\sqrt{\dfrac{13+11}{2}}+\sqrt{\dfrac{13-11}{2}}=$

$=\sqrt{12}+1=2\sqrt{3}+1$; $a=\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}$. Analog $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.
Deci $a=\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}=\sqrt{1}=1 \in \mathbb{N}$.

3. Determinați numărul $A=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Soluție. Fie $x=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$, $y=\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$. Avem $x>\sqrt[3]{20+2}>2$, $y>0$ și $xy=$ $=\sqrt[3]{400-392}=2$. Atunci $A^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=20+\sqrt{392}+20-\sqrt{392}+$ $+3\cdot 2A=40+6A \Leftrightarrow A^3-6A-40=0 \Leftrightarrow (A^3-4A^2)+(4A^2-16A)+(10A-40)=$ $=0 \Leftrightarrow (A-4)(A^2+4A+10)=0$. Deoarece $A^2+4A+10=(A+2)^2+6>0 \Rightarrow A=4$.

4. Rezolvați ecuația $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.
Soluția I. $\sqrt[3]{x+2}=-\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+3}\right) \Leftrightarrow x+2=-\left[x+1+x+3+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot\right.$ $\left.\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+3}\right)\right] \Leftrightarrow x+2=-\left[2(x+2)+3\sqrt[3]{(x+1)(x+3)}\cdot\left(-\sqrt[3]{x+2}\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+2)=3\sqrt[3]{(x+1)(x+3)}\cdot\sqrt[3]{x+2} \Rightarrow x+2=0$ sau $\sqrt[3]{(x+2)^2}=\sqrt[3]{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-2$ sau $x^2+4x+4=x^2+4x+3$. Rămâne $x=-2$.
Soluția II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}$. Funcția f este strict crescătoare și deoarece $f(-2)=0 \Rightarrow x=-2$ soluție unică.

Probleme propuse

1. Demonstrați că pentru orice $a, b \in (0,\infty)$, $a<b$, avem:

$$a\le\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le b.$$

2. Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{2-|x|}$; b) $\sqrt{4-|2x-2|}$; c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$;
d) $\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}$; e) $\sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$ f) $\sqrt{(x^2-1)(4-x)(x-2)}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că:

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; b) $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$; c) $\sqrt{-x^2}=x$;

d) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$; e) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=1-x$; f) $\sqrt{(x-2)^2}=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

4. Efectuați:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

5. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Q}$ știind că:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+2}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$; b) $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}$.

6. Raționalizați:

a) $\dfrac{2}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{\sqrt{15}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; e) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$; h) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$;

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; l) $\dfrac{6}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3}$.

7. Comparați numerele a și b în cazurile:

a) $a=\sqrt{11}+\sqrt{13}$; $b=\sqrt{10}+\sqrt{14}$; b) $a=\sqrt{17}-\sqrt{13}$, $b=\sqrt{15}-\sqrt{11}$.

8. Demonstrați că:

a) $\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$; b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}>1{,}41(4)$.

9. Fie $x \in [-4; 0]$, $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x-4y+4=0$. Determinați:

$$a=\sqrt{x^2+9y^2+8x+16}+\sqrt{x^2+9y^2-18y+9}.$$

10. Determinați următoarele numere:

a) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$; b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}-\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$; d) $\sqrt[3]{10+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

11. Calculați sumele:

a) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

12. Efectuați:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$;

b) $(3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}):(3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45})$.

13. Efectuați:

a) $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}-\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$; b) $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

14. Efectuați:

a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; b) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$.

15. Efectuați:

a) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; b) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$.

16. Raționalizați fracțiile:

a) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$; b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$; d) $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

17. Efectuați:

a) $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$; b) $\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$.

18. Efectuați $\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}\right)$.

19. Pentru $a>3$, demonstrați că $\frac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$.

20. Pentru $ab>0$, determinați $E(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$, $x=\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$.